

Olimpiada de Fizică - Etapa națională
30 ianuarie – 4 februarie 2011

Arad

Baraj

Problema a V - a (10 puncte)

Univers și găuri negre

A. Spectrul emisiei de lumină a atomilor dintr-o anumită specie suferă o deplasare spre roșu atunci când se observă emisia provenind de la stele îndepărtate. Deplasarea spectrală poate fi justificată de existența efectului Doppler, dacă se admite că stelele observate „fug”, se îndepărtează de Pământ. Observarea deplasării descrise mai sus a condus la stabilirea legii Hubble conform căreia cu cât o stea este mai depărtată de Pământ cu atât se îndepărtează de Pământ cu o viteză mai mare, $v = H \cdot s$. În expresia legii v este viteza cu care se îndepărtează steaua aflată la distanța s de Pământ.

Un model simplificat pentru universul în expansiune este reprezentat de un balon care se umflă. Marginea universului este reprezentată de suprafața balonului sferic, iar galaxiile sunt puncte pe suprafața acestui balon. Raza balonului corespunde razei universului la un moment de timp dat $R(t)$. Atunci când balonul se umflă, unghiul la centru dintre punctele reprezentând galaxiile rămâne constant. În această modelare simplă se consideră situația unui „balon” care se extinde cu o viteză radială constantă.

1. Dedu expresia vitezei cu care două puncte de pe suprafața balonului se depărtează unul față de altul ($\Delta s/\Delta t$) ca funcție de distanța dintre puncte s de raza universului $R(t)$ și de viteza (constantă) de variație a acestei raze ($\Delta R/\Delta t$).
2. Din compararea relației deduse la punctul 1 cu legea Hubble determină expresia constantei H .
3. Arată că pentru o rază R a universului și pentru o expansiune uniformă a acestuia (adică pentru $\Delta R/\Delta t = \text{constant} = K$) există o distanță s_c cu proprietatea că o galaxie aflată la aceasta distanță (sau la o distanță mai mare) emite fotoni care nu mai ajung niciodată la galaxia noastră (distanța s_c se numește orizont).

Consideră că universul este o sferă de gaz în expansiune având densitatea de masă uniformă ρ , masa totală M și raza $R(t)$. O particulă de masă m de pe suprafața acestei sfere se va deplasa radial spre exterior cu viteza $v = \Delta R/\Delta t$. Consideră că energia E a particulei verifică relația

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\Gamma \cdot M}{R} = \frac{E}{m} = C \quad (1)$$

4. Descrie calitativ evoluția universului în funcție de valorile constantei C .
5. Rescrie relația (1) în funcție de H, R, C, Γ și ρ .

Pagina 1 din 5

- Proba de baraj pentru selecția lotului olimpic lărgit de fizică conține cinci probleme.
- Durata probei este de cinci ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
- Fiecare problemă se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
- Elevii pot utiliza calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
- Pentru fiecare problemă evaluarea se face ținându-se cont atât de soluția redactată de elevul competitor, cât și de rezultatele pe care acesta le completează în Foaia de răspunsuri.
- Fiecare problemă se punctează de la 10 la 0 (nu se acordă punct din oficiu).
- Punctajul final reprezintă suma punctajelor acordate pentru fiecare dintre cele cinci probleme.

Pentru mărimile care au valori dependente de timp se introduce un indice 0 atunci când se face referire la momentul actual. În cele ce urmează, presupune că $H_0 = 2,5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ și $\Gamma = 6,7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot (\text{m} / \text{kg})^2$.

6. Determină valoarea minimă a densității pe care ar trebui s-o aibă universul acum (ρ_0), pentru a rămâne închis ($C = 0$).

7. Determină pentru situația de la punctul 6 dependența de timp a razei universului și valoarea vârstei universului.

B. Unele proprietăți ale găurilor negre pot fi deduse folosind analiza dimensională. În cele ce urmează consideră că toate caracteristicile fizice ale unei găuri negre sunt determinate doar de masa acesteia. O caracteristică fizică principală a găurii negre este aria orizontului evenimentelor. Orizontul evenimentelor reprezintă marginea găurii negre. În interiorul delimitat de această graniță, câmpul gravitațional este atât de intens încât nici măcar lumina nu mai poate ieși din regiunea închisă de aceasta.

1. Determină o relație între masa unei găuri negre m și aria orizontului său, A . Această arie depinde de masa găurii negre m , viteza luminii c și constanta universală a gravitației Γ conform expresiei $A = \Gamma^\alpha c^\beta m^\gamma$. Folosește analiza dimensională pentru a determina α, β, γ .

Din rezultatul dedus la punctul 1 rezultă clar că aria orizontului evenimentelor pentru o gaură neagră crește cu masa ei. Din punct de vedere clasic, nimic nu iese dintr-o gaură neagră și deci în toate procesele fizice aria orizontului evenimentelor nu poate decât să crească. Prin analogie cu legea a doua a termodinamicii, Beckenstein a propus să se atribuie unei găuri negre entropia S , proporțională cu aria suprafeței orizontului găurii negre, adică $S = \eta A$.

2. Utilizează definiția termodinamică a entropiei $dS = dQ/\theta$ pentru a găsi dimensiunea entropiei.

În relația de definiție dQ reprezintă căldura schimbată, iar θ este temperatura absolută a sistemului.

3. Exprimă constanta η în funcție de constantele fundamentale h, c, Γ și k_B .

Cu o abordare semi cuantică, Hawking a argumentat că în contradicție cu punctul de vedere clasic, găurile negre emit radiație similar emisiei de radiație a unui corp negru aflat la o temperatură numită *temperatură Hawking*. Legea Stefan Boltzmann exprimă puterea radiată, adică energia emisă în unitatea de timp $dE/dt = -\sigma\theta_H^4 A$.

4. Utilizează relația $E = mc^2$ care exprimă energia unei găuri negre în funcție de masa acesteia și legile termodinamicii pentru a deduce expresia pentru temperatura Hawking a găurii negre θ_H , în funcție de masa ei și constantele fundamentale h, c, Γ și k_B . Presupune că gaura neagră nu efectuează lucru mecanic asupra mediului care o înconjoară.

Masa unei găuri negre izolate variază din cauza radiației Hawking.

5. Folosește legea Stefan Boltzmann pentru a determina dependența ratei de variație a masei unei găuri negre izolate, la temperatura Hawking θ_H a găurii negre, ca funcție de masa acesteia și de constantele fundamentale h, c și Γ .

6. Determină expresia intervalului de timp t^* , în care o gaură neagră izolată de masă m se evaporă complet, adică pierde toată masa. Exprimă rezultatul în funcție de masa acesteia și de constantele fundamentale h, c și Γ .








7. Determină expresia capacității calorice a unei găuri negre de masă m . Exprimă rezultatul în funcție de masa acesteia și de constantele fundamentale h, c, Γ și k_B .

Subiect propus de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Evaluare și Examinare – M E C T S

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI - Facultatea de Fizică – Universitatea București

Pagina 2 din 5

-  Proba de baraj pentru selecția lotului olimpic lărgit de fizică conține cinci probleme.
-  Durata probei este de cinci ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
-  Fiecare problemă se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
-  Elevii pot utiliza calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
-  Pentru fiecare problemă evaluarea se face ținându-se cont atât de soluția redactată de elevul competitor, cât și de rezultatele pe care acesta le completează în Foaia de răspunsuri.
-  Fiecare problemă se punctează de la 10 la 0 (nu se acordă punct din oficiu).
-  Punctajul final reprezintă suma punctajelor acordate pentru fiecare dintre cele cinci probleme.



Olimpiada de Fizică - Etapa națională
30 ianuarie – 4 februarie 2011

Baraj

Arad

Foaie de răspunsuri

Problema a V - a (10 puncte)

Univers și găuri negre

A.

1. Expresia vitezei cu care două puncte de pe suprafața balonului se depărtează unul față de altul

2. Expresia constantei H

3. Expresia distanței s_i

4. Descrierea calitativă a evoluției universului în funcție de valorile constantei C

5. Relația (1) exprimată în funcție de H, R, C, Γ și ρ

6. Valoarea minimă a densității pe care ar trebui s-o aibă universul acum (ρ_0), pentru a rămâne închis

7. Dependența de timp a razei universului

Valoarea vârstei universului

B.

1. Relația între masa unei găuri negre și aria orizontului său

2. Dimensiunea entropiei

3. Expresia constantei η

4. Expresia pentru temperatura Hawking a găurii negre

5. Expresia ratei de variație a masei unei găuri negre izolate, la temperatura Hawking

6. Expresia intervalului de timp t^* , în care o gaură neagră izolată de masă m se evaporă complet

7. Expresia capacității calorice a unei găuri negre de masă m