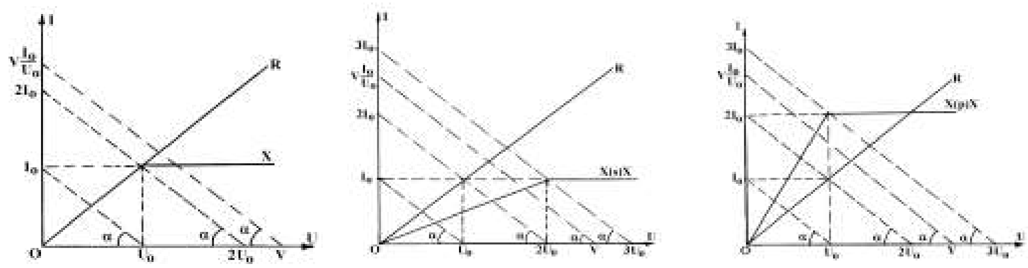
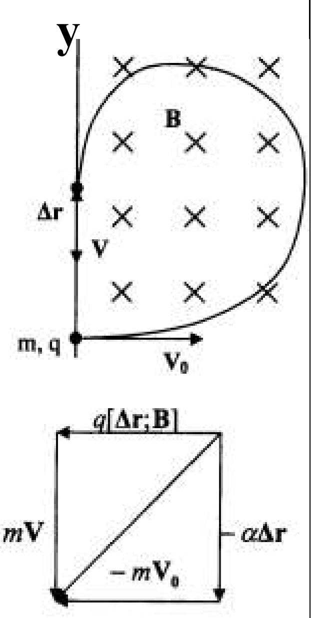
MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE FIZICĂ
ETAPA NAŢIONALĂ
30 IANUARIE- 4 FEBRUARIE 2011
ARAD

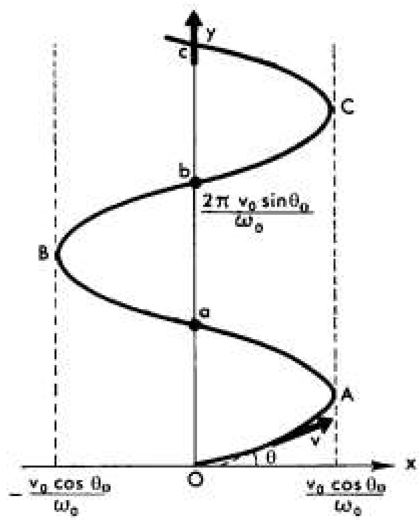
XII

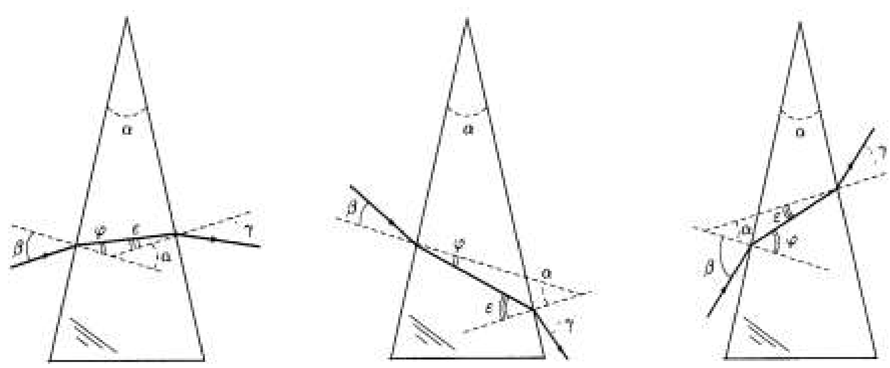
Barem de evaluare

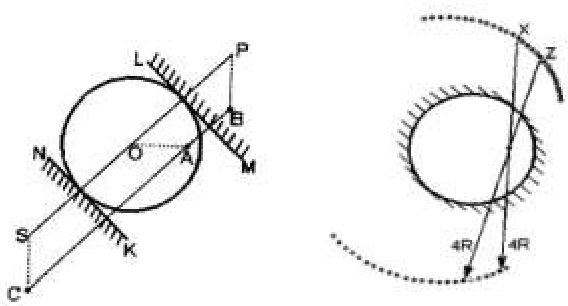
Subiectul 1	**Parţial**	**Punctaj**
		10
A. Circuit cu element neliniar		**4 p**
 1) Rezistenţa rezistorului este $R = U_0 / I_0$ iar căderea de tensiune pe elementul neliniar este $U = V - RI = V - U_0 I / I_0$, (*). Avem de-a face cu o dreaptă cu pantă negativă, cu „tăieturile” $(V; VI_0 / U_0)$. Panta ei nu depinde de valoarea V a tensiunii de la borne (prima figură). Avem $tg\alpha = I_0 / U_0$ **..................0,50 p**	**0,5 p**	
a) Când $V \le 2U_0$, curentul fiind inferior lui I_0, elementul neliniar X se comportă ca şi rezistorul R. În consecinţă $\eta_{1a} = 1/2$ (adică 50 %)**..0,25 p** b) Pentru $V > 2U_0$ curentul îşi atinge valoarea maximă I_0 iar căderea de tensiune pe elementul neliniar X va fi $U = V - U_0$. Putem scrie $\eta_{1b} = \frac{P_X}{P_X + P_R} = \frac{UI}{UI + RI^2}$ cu $I = I_0$ şi $U = V - U_0$, adică $\eta_{1b} = \frac{V - U_0}{V - U_0 + U_0} = 1 - \frac{U_0}{V}$. Pentru $V = 4U_0$ găsim $\eta_{1b} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (adică 75**%)**.**...0,50 p**	**0,75 p**	
2) Caracteristica volt-amperică a grupării serie $(X + X)$ este arătată în a doua figură. Ea s-a obţinut însumând căderile de tensiune pentru fiecare valoare concretă a curentului.Ca şi în cazul iniţial, căderea de tensiune pe gruparea neliniară este $U = V - RI = V - U_0 I / I_0$ (relaţia (*) rămâne adevărată)**.........0,50 p** Când tensiunea de la borne este $V = 4U_0 (> 3U_0)$, curentul din circuit este cel de „saturaţie”, adică $I = I_0$ şi, în consecinţă, $U = 4U_0 - U_0 = 3U_0$. Avem $\eta_2 = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{3U_0 I_0}{3U_0 I_0 + U_0 I_0} = \frac{3}{4}$ (adică 75%). ...**......................................0,25 p** Dacă însă $V = 2{,}5U_0 (< 3U_0)$, gruparea celor două elemente neliniare înseriate se comportă rezistiv $(R_{2X} = 2R)$ şi $\eta_3 = 2R/(2R + R) = 2/3$ (adică 66,7%). **...0,25 p**	**1,50 p**	

Pentru situaţia cu n elemente neliniare X înseriate: a) Când tensiunea la borne $V > (n+1)U_0$, curentul este la saturaţie ($I = I_0$) şi fracţiunea η se exprimă mereu prin relaţia $1 - U_0/V$; altfel spus, la saturaţie, fracţiunea η nu depinde de numărul n, ci doar de tensiunea V aplicată la borne; b) Când $V < (n+1)U_0$, adică înainte de saturaţie, circuitul fiind pur rezistiv, fracţiunea este $\eta = n/(n+1)$ **...0,50 p**		
3) De data aceasta, caracteristica volt-amperică a grupării paralele a celor două elemente neliniare se obţine adunând valorile curenţilor pentru fiecare valoare concretă a tensiunii. Situaţia este cea din a treia figură. Formula (*) rămâne valabilă şi de data aceasta**...0,50 p** Se observă că pentru $V > 3U_0$ curentul principal este $2I_0$. Astfel, pentru fracţiunea η_4 putem scrie $\eta_4 = \dfrac{P_{2X(p)}}{P_{2X(p)} + P_R} = \dfrac{2I_0(V-2U_0)}{2I_0(V-2U_0) + R(2I_0)^2} = 1 - \dfrac{2U_0}{V}$. Când $V = 4U_0$, găsim $\eta_4 = 1/2$ (adică 50%)...**0,50 p** În situaţia în care $V = 2{,}5U_0 (< 3U_0)$ gruparea paralelă se comportă ca un rezistor cu rezistenţa $R/2$ şi, în consecinţă, $\eta_5 = \dfrac{R/2}{R/2 + R} = \dfrac{1}{3}$ (adică 33,3**%)..0,25 p**	**1,25 p**	
B. Particulă electrizată, în mediu vâscos şi în câmp magnetic omogen		**5 p**
Prin integrarea ecuaţiei de mişcare $m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = -\alpha\dfrac{d\vec{r}}{dt} + q(\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B})$, de la starea iniţială precizată în enunţ, până la o stare „finală” din mediul vâscos, obţinem $m\Delta\vec{v} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = -\alpha\Delta\vec{r} + q(\Delta\vec{r} \times \vec{B})$, (*), unde $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}$ (deoarece $\vec{r}_0 = 0$)..**1.00 p**	**1,00 p**	
Drept „stare finală” considerăm situaţia în care, sub acţiunea câmpului magnetic, particula a reuşit să efectueze o mişcare de rotaţie, ca <u>în figura de sus</u>, rămânând în mediul vâscos. Mai exact, pe desen este prezentată revenirea în apropierea planului separator $x = 0$, cu suportul vitezei $\vec{v}$ (tangent la traiectorie), paralel cu axa Oy, având sensul în jos (opus sensului pozitiv de pe această axă). Pentru această situaţie, determinăm o valoare α_{critic} a coeficientului de proporţionalitate din expresia forţei de frecare. Pentru valori ale lui α mai mari decât această valoare critică, particula nu poate părăsi mediul vâscos (frecarea fiind mai mare decât cea care conduce la situaţia “limită” reprezentată în primul desen)..**0,75 p** **(**din care pentru primul desen **0,25p)**  	**0,75 p**	
Cei patru termeni (vectori) ai relaţiei (*) -corespunzând „stării finale”		

precizate- pot fi reprezentaţi ca în diagrama alăturată. Direcţiile fiind ortogonale, pentru modulele vectorilor respectivi putem scrie separat $mv = \alpha\Delta r$, pe verticală, respectiv $mv_0 = qB\Delta r$, pe orizontală. Eliminând mărimea Δr (comună celor două relaţii) găsim expresia $v/v_0 = \alpha/(qB)$, **(**)..0,25p (desen)+0,25p+0,25p+0,25p= 1,00 p**	**1,00 p**	
După cum se ştie, viteza cu care se modifică în timp unghiul de rotaţie este determinată numai de câmpul $\vec{B}$ şi de sarcina specifică q/m a particulei. Avem viteza unghiulară $\omega = qB/m$ **..................0,5p** Unghiul de rotaţie fiind $\theta = 3\pi/2$, din relaţia $\theta = \omega t$ obţinem imediat timpul cât a durat rotirea: $t = 3\pi m/2qB$, **(***)...0,25p+0,25p+0,25p=0,75 p**	**1,25 p**	
Câmpul magnetic $\vec{B}$ nu poate modifica modulul vitezei deoarece forţa Lorentz, fiind perpendiculară pe viteza $\vec{v}$, nu efectuează lucru mecanic. Modulul vitezei scade totuşi în timp din cauza forţei de frecare. Din relaţia $mdv/dt = -\alpha v$, prin integrare, obţinem imediat $v/v_0 = \exp(-\alpha t/m)$ **..0,50 p** Introducem aici expresiile de mai sus ale lui v şi t şi găsim ecuaţia exponenţială $\alpha/(qB) = \exp[-(\alpha/m)(3m\pi/2qB)]$. **...0,25 p**	**0,75 p**	
Introducem notaţia adimensională $\phi = \alpha/(qB)$ şi obţinem $\phi = \exp(3\phi\pi/2)$, cu soluţia aproximativă (dată în enunţ) $\phi \approx 0,274$. Astfel rezultă un $\alpha_{critic} \approx 0,274(qB)$. Dacă $\alpha > \alpha_{critic}$, particula nu poate ieşi din semispaţiul vâscos $x > 0$. *Observaţie:* α_{critic} nu depinde nici de masa particulei, nici de viteza iniţială.**...0,25 p**	**0,25 p**	
Oficiu		**1,00**

Subiectul 2	**Parţial**	**Punctaj**
		10
A. Traiect luminos într-un mediu neomogen 1) Energia potenţială este cea a unui oscilator armonic liniar (în lungul axei *Ox*) cu constanta de elasticitate $k = m\omega_0^2$ ....**0,3p** Rezultă următoarele componente ale forţelor: $F_x = -kx$ şi $F_y = 0$. Legea II Newton ne dă $ma_x = -kx = -m\omega_0^2 x$ (adică $a_x = -\omega_0^2 x$) şi $a_y = 0$ ....**0,8p** Aceste acceleraţii pot corespunde doar unor mişcări descrise de dependenţele $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \Phi)$ şi $y(t) = Ct + D$, ...**0,3p** componentele vitezelor fiind $v_x(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \Phi)$ şi $v_y(t) = C$. ....**0,3p** Condiţiile iniţiale (la $t = 0$) referitoare la poziţie şi viteză ne conduc la: $D = 0$, $C = v_0\sin\theta_0$, $A\sin\Phi = 0$ (adică $\Phi = 0$) şi $A\omega_0\cos\Phi = v_0\cos\theta_0$ (adică $A = (v_0/\omega_0)\cos\theta_0$)..................................**0,3p** În final avem $x(t) = [(v_0/\omega_0)\cos\theta_0]\sin(\omega_0 t)$, $y(t) = (v_0\sin\theta_0)t$ ....**0,3p** Scriind $t = y/(v_0\sin\theta_0)$ în prima relaţie (eliminăm timpul) găsim traiectoria $x = [(v_0/\omega_0)\cos\theta_0]\sin[(\omega_0/v_0\sin\theta_0)y]$. Este vorba despre o sinusoidă, cu x cuprins între $-A$ şi $+A$. Avem intersecţii cu axa *Oy* la $y_n = n\pi(v_0/\omega_0)\sin\theta_0$, cu $n = 0,\pm1,\pm2,$........**0,5p**  	2.80	
2) Din legea conservării energiei $(m/2)v^2 + (k/2)x^2 = const = (m/2)v_0^2$ rezultă imediat dependenţa solicitată, anume $v = v_0\sqrt{1-(\omega_0/v_0)^2 x^2}$ ....**0,5p** Faptul că $a_y = 0$, respectiv că $v_y(t) = const$, se poate exprima sub forma $v\sin\theta = v_0\sin\theta_0$, ceea ce înseamnă $\sin\theta_0/\sin\theta = v/v_0 = \sqrt{1-(x\omega_0/v_0)^2}$, (*)..**0,4p**	0.90	5.00
3) Deoarece indicele de refracţie variază numai în lungul axei *Ox*, mediul poate fi considerat ca un mediu lamelar (stratificat), feţele plane (ale „lamelor”		

succesive) fiind paralele cu planul yOz . Traiectului luminos este conţinut în planul xOy. Normalele locale în toate punctele de incidenţă (la trecerea dintr-un strat în cel următor) sunt paralele cu axa Ox. În consecinţă, legea Snell-Descartes a refracţiei are forma $n(x)\sin\theta(x) = const = n_0 \sin\theta_0$, astfel că $\sin\theta_0 / \sin\theta(x) = n(x)/n_0 = \sqrt{1-(x/\ell)^2}$. Este necesar ca $\lvert x\rvert < \ell$. (**). ...**0,5p**	**0.50**	
4).5). Comparând relaţiile (*) şi (**) putem stabili corespondenţa $v_0/\omega_0 \leftrightarrow \ell$. Astfel, traiectul luminos are ecuaţia $x = [\ell\cos\theta_0]\sin[(1/\ell\sin\theta_0)y]$ . ...**0,4p** Aici $\ell\cos\theta_0$ este amplitudinea sinusoidei şi corespunde parametrului A de mai sus (vezi punctul2)) . Pulsaţia spaţială este $1/\ell\sin\theta_0$. Punctele extreme ale sinusoidei (pe desen A,B,C,...) corespund locurilor unde au loc <u>reflexii totale</u>, adică la $\lvert x\rvert = \ell\cos\theta_0 < \ell$. Din (**) rezultă $\sin\theta(x) = 1$ ....**0,2p** Nu este necesar un alt desen dacă primul a fost trasat corect. Intersecţiile sinusoidei cu axa Oy sunt la $y_n = n\pi\ell\sin\theta_0$, cu $n = 0,\pm1,\pm2,...$. Toate unghiurile de la traversarea axei Oy sunt egale cu θ_0 ....**0,2p**	**0.80**	
B. O prismă optică specială În principiu sunt posibile cele trei situaţii arătate în figurile a), b) şi c). Pentru desenele a), b) şi respectiv c) corecte se acordă **0,2+0,3+0,3 puncte, adică....în total...0,8p**  a). b). c). În primul caz avem $\alpha = \varphi + \varepsilon$, $\sin\beta = n\sin\varphi$ şi $n\sin\varepsilon = \sin\gamma$. Din aceste relaţii, printr-o prelucrare trigonometrică lipsită de dificultăţi, găsim $\sin\gamma = ... = \sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\beta} - \cos\alpha\sin\beta = 0{,}366 - 0{,}483 = -0{,}117$. Această situaţie nu este fizic posibilă **!...0,4p** În al doilea caz avem $\varepsilon = \alpha + \varphi$. Celelalte relaţii (legile II refracţie) de la intrare şi ieşire rămân nemodificate. Prin acelaşi gen de prelucrare trigonometrică, acum obţinem $\sin\gamma = ... = \sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\beta} + \cos\alpha\sin\beta = 0{,}366 + 0{,}483 = +0{,}849$, ceea ce înseamnă $\gamma = 58{,}1^{0}$ **...0,4p** În al treilea caz avem $\varepsilon = \varphi - \alpha$ şi, din nou, legile II refracţie îşi păstrează forma. Finalmente avem	**2.00**	**2.00**

<table>
<tr><td>$\sin\gamma = \ldots = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\beta} = 0{,}483 - 0{,}366 = +0{,}117$,adică
$\gamma = 6{,}72^0$ ………………………………………………………..0,4p</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C. Localizarea unei surse de lumină
Să considerăm două oglinzi plane elementare de la capetele unui diametru, perpendiculare pe acesta (adică tangente la suprafaţa cilindrică): LM şi NK pe figură. Fie O centrul cercului (secţiune normală prin cilindru) şi A poziţia sursei luminoase punctiforme. Punctele B şi C sunt imaginile virtuale, în cele două oglinzi, ale sursei A. Desigur A şi B sunt simetrice faţă de oglinda LM, tot aşa cum A şi C sunt simetrice faţă de oglinda NK. Construim punctele P şi S ca simetrice ale lui O faţă de cele două oglinzi. PB este imaginea lui OA în oglinda LM iar SC este imaginea aceluiaşi obiect OA în oglinda NK. Dacă R este raza cercului cilindrului putem spune că $|SP| = 4R$. Deoarece trapezele OABP şi OACS sunt isoscele rezultă că figura SPBC este un paralelogram astfel că $|CB| = |SP| = 4R$.


Raţionamentul ce conduce la această concluzie ....1 p
Aşadar, procedăm în felul următor: căutăm perechile de puncte imagine, de pe cele două „pânze” (din enunţ), între care distanţa este $4R$ şi la intersecţia dreptelor respective se află sursa luminoasă (A). Pe al doilea desen am ales, pe una din „pânze”, punctele X şi Z, căutând pe cealaltă „pânză” locurile până la care distanţele sunt $4R$ în fiecare caz..0,5p
Oglinzile locale care au produs imaginile de la capetele unei drepte cu lungimea $4R$, care trece prin A, se află la capetele diametrului paralel cu respectiva dreaptă..0,5p</td><td>2.00</td><td>2.00</td></tr>
<tr><td>Oficiu</td><td></td><td>1.00</td></tr>
</table>

Subiectul 3	**Parţial**	**Punctaj**
		10
A. Reflexia luminii de la o stea, pe o oglindă mobilă		**7,00 p**

a) În sistemul de referinţă al oglinzii (sistemul S′), faţă de care legea reflexiei luminii este valabilă, unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie $\left(i_0' = r_0'.\right)$ **………………………………………………………………0,25 p**

4,00 p

Se ştie că, între componentele vectorilor $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$, reprezentând vitezele unui punct material în raport cu sistemele S şi respectiv S', precizate în enunţul problemei, există relaţiile:

$$\mathrm{v_x} = \mathrm{v}'_{\mathrm{x'}}\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{u\,\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}}}{c^2}};\ \mathrm{v_y} = \frac{\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}}+u}{1+\dfrac{u\,\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}}}{c^2}};\ \mathrm{v_z} = \mathrm{v}'_{\mathrm{z'}}\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{u\,\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}}}{c^2}}.$$ **………………0,50 p**

Viteza luminii, în raza incidentă şi în raza reflectată, are aceeaşi valoare c în raport cu ambele sisteme de referinţă (S şi S′), dar componentele acestor viteze, paralele cu axele celor două sisteme, au valori diferite, aşa cum indică tabelul alăturat. **……………………………………………………………..0,50 p**

Raza / Sistemul	Componentele vitezei luminii în *raza incidentă*	Componentele vitezei luminii în *raza reflectată*
Sistemul mobil $\mathrm{S'(O'X'Y'Z')}$	$\mathrm{v}'_{\mathrm{x'}} = 0$ $\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}} = c\cos i_0'$ $\mathrm{v}'_{\mathrm{z'}} = c\sin i_0'$	$\mathrm{v}'_{\mathrm{x'}} = 0$ $\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}} = -c\cos i_0'$ $\mathrm{v}'_{\mathrm{z'}} = c\sin i_0'$
Sistemul fix $\mathrm{S(OXYZ)}$	$\mathrm{v_x} = 0$ $\mathrm{v_y} = c\cos i_0$ $\mathrm{v_z} = c\sin i_0$	$\mathrm{v_x} = 0$ $\mathrm{v_y} = -c\cos r_0$ $\mathrm{v_z} = c\sin r_0$

Între componentele vectorilor care reprezintă viteza luminii din fiecare rază, în raport cu cele două sisteme de referinţă, existând relaţiile cunoscute, rezultă:

- pentru raza incidentă: **………………………………………0,25 p**

$$\mathrm{v_x} = \mathrm{v}'_{\mathrm{x'}} = 0;$$

$$\mathrm{v_y} = \frac{\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}}+u}{1+\dfrac{u\,\mathrm{v}'_{\mathrm{y'}}}{c^2}} = \frac{c\cos i_0' + u}{1+\dfrac{u}{c}\cos i_0'} = c\cos i_0;$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{z}} = \mathrm{v}'_{\mathrm{z}'}\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{u\,\mathrm{v}'_{\mathrm{y}'}}{c^2}} = c\sin i_0'\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1+\dfrac{u}{c}\cos i'} = c\sin i_0;$$

- pentru raza reflectată: **……………..…………………………….0,25 p**

$$\mathrm{v}_{\mathrm{x}} = \mathrm{v}'_{\mathrm{x}'} = 0;$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{y}} = \frac{-c\cos i_0' + u}{1-\dfrac{u}{c}\cos i_0'} = -c\cos r_0;$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{z}} = c\sin i_0'\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{u}{c}\cos i_0'} = c\sin r_0.$$

Ştiind că $u = \beta c$, rezultă:

$$\cos i_0 = \frac{\cos i_0' + \beta}{1+\beta\cos i_0'} > \cos i_0';$$

$i_0 < i_0'$; **……………………………..………………………….0,25 p**

$$\sin i_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\sin i_0'}{1+\beta\cos i_0'};$$

$$\tan i_0 = \frac{\sin i_0'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos i_0' + \beta};$$

$$\cos r_0 = \frac{\cos i_0' - \beta}{1-\beta\cos i_0'} < \cos i_0';$$

$r_0 > i_0'$; **…………………………..………..…………………..0,25 p**

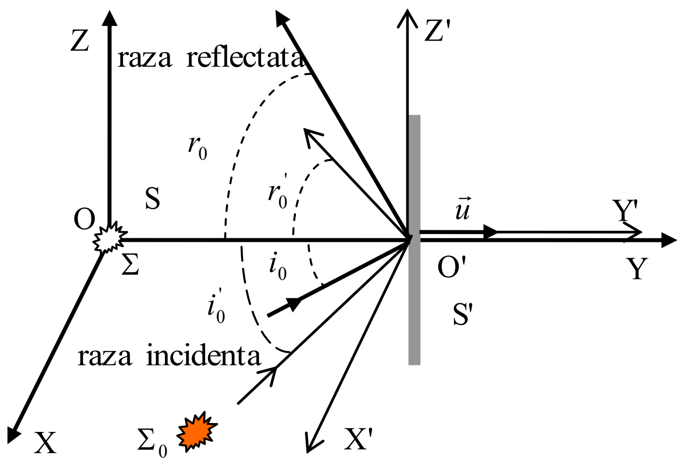
$$\cos r_0 = \frac{\cos i_0' - \beta}{1-\beta\cos i_0'} < \cos i_0;$$

$r > i$; **……………………………………………………..……….0,25 p**

$$\sin r_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\sin i_0'}{1-\beta\cos i_0'};$$

$\tan r_0 = \dfrac{\sin i_0'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos i_0' - \beta} > \tan i_0$; $r_0 > i_0$, **………………..………0,25 p**

astfel încât direcţiile razelor incidentă şi respectiv reflectată, raportate la cele două sisteme de referinţă sunt cele reprezentate în figura alăturată.



………………………..……………………..0,25 p

Din relaţiile anterioare, rezultă:

$$\cos i_0 - \beta = \frac{\left(1-\beta^2\right)\cos i_0'}{1+\beta\cos i_0'};$$

$$\cos r_0 + \beta = \frac{\left(1-\beta^2\right)\cos i_0'}{1-\beta\cos i_0'};$$

$$\frac{\cos i_0 - \beta}{\cos r_0 + \beta} = \frac{1-\beta\cos i_0'}{1+\beta\cos i_0'};$$

$$\frac{\sin i_0}{\sin r_0} = \frac{1-\beta\cos i_0'}{1+\beta\cos i_0'};$$

$$\frac{\sin i_0}{\sin r_0} = \frac{\cos i_0 - \beta}{\cos r_0 + \beta}$$ **……………………………………………0,50 p**

Concluzie: legea cunoscută a reflexiei nu mai este adevărată şi în raport cu sistemul fix S, faţă de care oglinda este în mişcare**……….………0,25 p**

Din relaţia anterioară, rezultă:

$$\sin r_0 \cos i_0 - \sin i_0 \cos r_0 = \beta\left(\sin i_0 + \sin r_0\right);$$

$$\beta = \frac{u}{c};$$

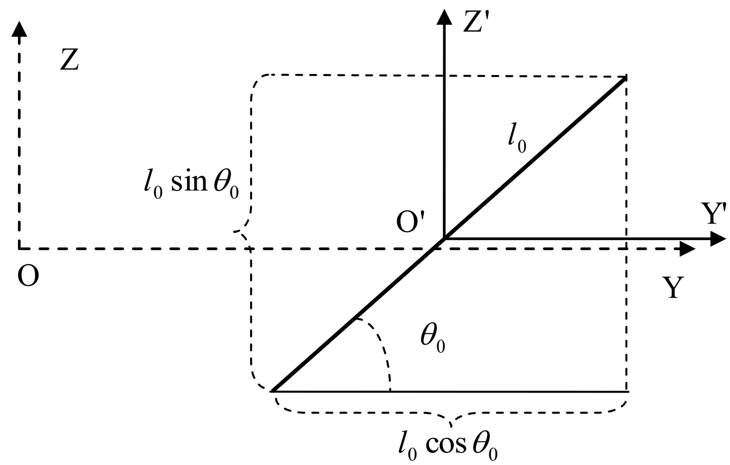
$$u = c\frac{\sin\left(r_0 - i_0\right)}{\sin i_0 + \sin r_0}$$ **…………………………..……………0,25 p**

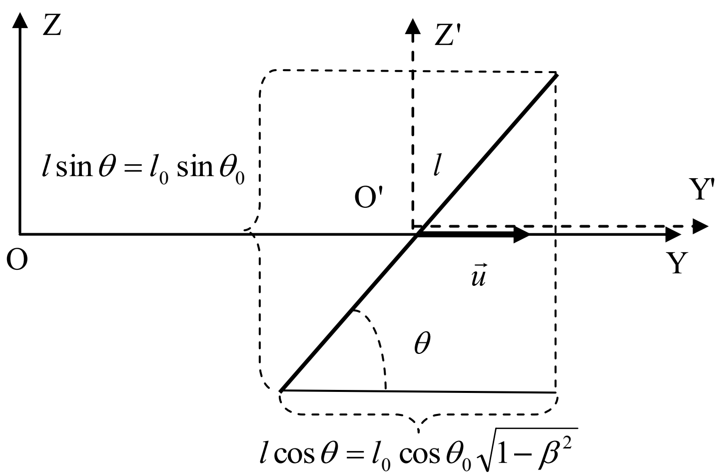
b) Cu notaţiile din figurile următoare, unde l_0 şi θ_0 sunt dimensiunea oglinzii din planul $Y'O'Z'$ şi respectiv unghiul format de planul oglinzii cu axa $O'Y'$, măsurate în sistemul S'(X'Y'Z'), iar l şi θ sunt dimensiunea oglinzii din planul YOZ şi respectiv unghiul format de planul oglinzii cu axa OY, măsurate în sistemul S(OXYZ), având în vedere contracţia Lorentz a dimensiunii oglinzii de pe direcţia mişcării, rezultă: **3,00 p**

$$l = \sqrt{l_0^2 \sin^2 \theta_0 + l_0^2 \cos^2 \theta_0 (1 - \beta^2)};$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} > \tan\theta_0;\ l = l_0\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_0} < l_0;$$

$\theta > \theta_0$ ....**0,25 p**

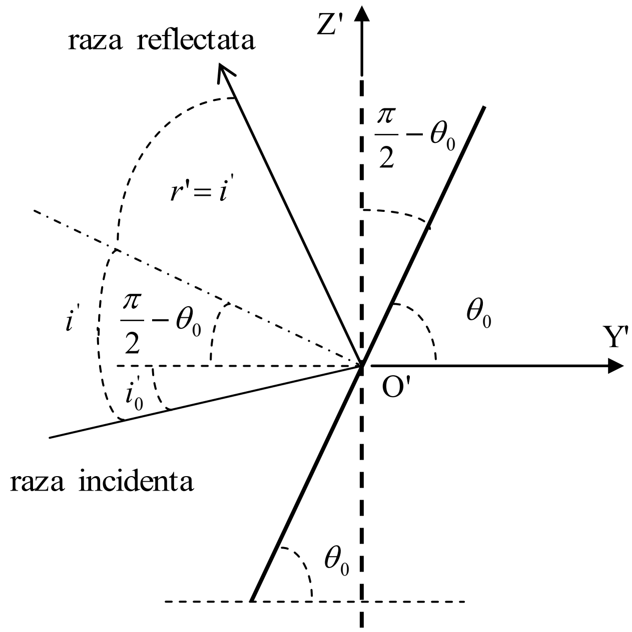
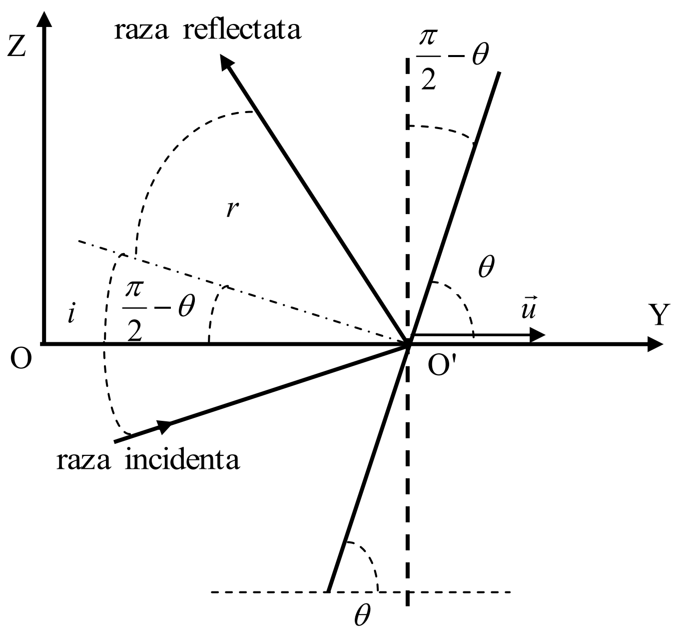




....**0,25 p**

După rotirea oglinzii cu unghiul $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$, măsurat din sistemul $S'(\mathrm{O'X'Y'Z'})$, unghiul de incidenţă al razei de lumină, i' şi unghiul de reflexie al razei de lumină, r', faţă de acelaşi sistem, aşa cum arată secvenţele din figura alăturată, sunt:

$i' = r' = i_0' + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\theta_0 - i_0'\right)$ ....**0,25 p**

Viteza luminii, în raza incidentă şi în raza reflectată, după rotirea oglinzii, are aceeaşi valoare *c* în raport cu ambele sisteme de referinţă (S şi S′), dar componentele acestor viteze, paralele cu axele celor două sisteme, exprimate utilizând figurile următoare, au valori diferite, aşa cum indică tabelul alăturat.		
 **…………………………. 0,25 p**		
 **...0,25 p**		

Sistemul \ Raza	Componentele vitezei luminii în *raza incidentă*	Componentele vitezei luminii în *raza reflectată*
Sistemul $S'(O'X'Y'Z')$	$v'_{x'} = 0$ $v'_{y'} = c\cos i'_0$ $v'_{z'} = c\sin i'_0$	$v'_{x'} = 0$ $v'_{y'} = -c\cos\left[i' + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right]$ $v'_{y'} = c\cos\left(2\theta_0 - i'_0\right)$ $v'_{z'} = c\sin\left[i' + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right]$ $v'_{z'} = c\sin\left(2\theta_0 - i'_0\right)$
Sistemul $S(OXYZ)$	$v_x = 0$ $v_y = c\cos\left[i - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ $v_y = c\sin(i+\theta)$ $v_z = c\sin\left[i - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ $v_z = c\cos(i+\theta)$	$v_x = 0$ $v_y = -c\cos\left[r + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ $v_y = -c\sin(\theta - r)$ $v_z = c\sin\left[r + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ $v_z = c\cos(\theta - r)$

……………………………………………………………0,25 p

În aceste condiţii, utilizând relaţiile dintre componentele vitezelor raportate la cele două sisteme de referinţă, rezultă:

- pentru raza incidentă: **……………….……………………………0,25 p**

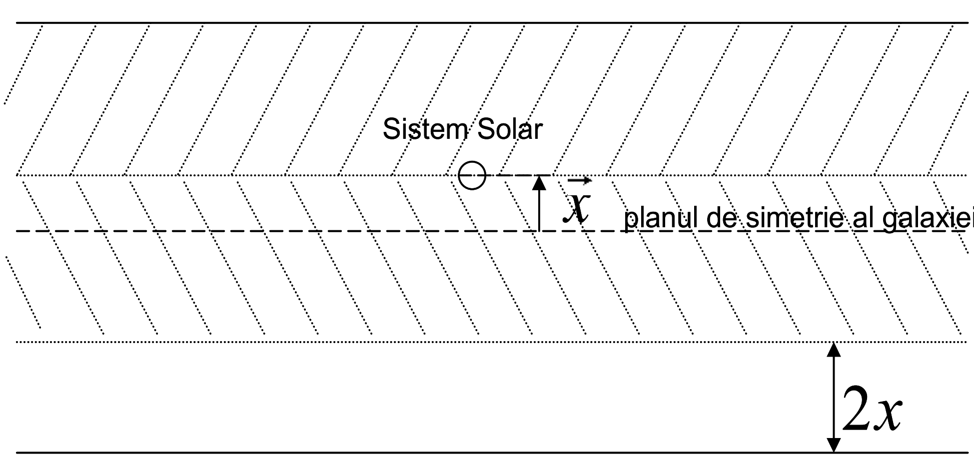
$$v_x = v'_{x'} = 0;$$

$$v_y = \frac{v'_{y'} + u}{1 + \frac{u\,v'_{y'}}{c^2}} = \frac{c\cos i'_0 + u}{1 + \frac{u}{c}\cos i'_0} = c\sin(i+\theta);$$

$$v_z = v'_{z'}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u\,v'_{y'}}{c^2}} = c\sin i'_0\,\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c}\cos i'_0} = c\cos(i+\theta);$$

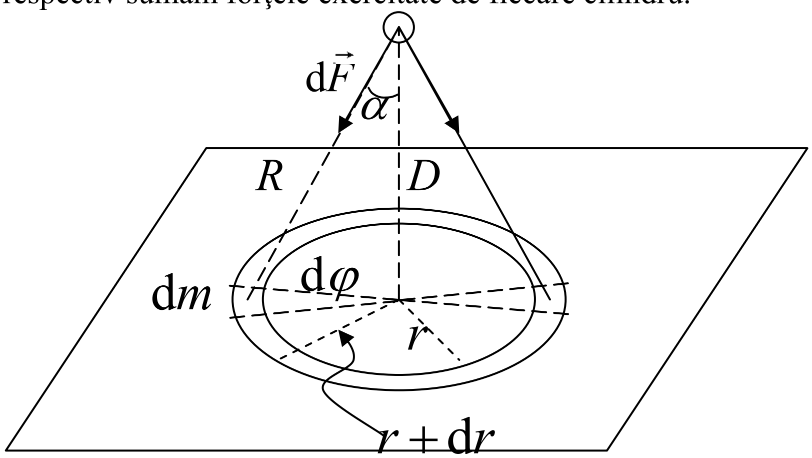
- pentru raza reflectată: **…………………………..……………0,25 p**

$$v_x = v'_{x'} = 0;$$

$$v_y = \frac{v'_{y'}+u}{1+\frac{u v'_{y'}}{c^2}} = \frac{c\cos\left(2\theta_0 - i'_0\right)+u}{1+\frac{u}{c}\cos\left(2\theta_0-i'_0\right)} = -c\sin(\theta - r);$$ $$v_z = v'_{z'}\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u v'_{y'}}{c^2}} = c\sin\left(2\theta_0-i'_0\right)\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cos\left(2\theta_0-i'_0\right)} = c\cos(\theta - ir).$$		
Știind că $u = \beta c$, rezultă: $$\frac{\cos i'_0 + \beta}{1+\beta\cos i'_0} = \sin(i+\theta);$$ $$\sin i'_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos i'_0} = \cos(i+\theta);\ i = i_0 + \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right);$$ $\tan(i+\theta) = \frac{\cos i'_0 + \beta}{\sin i'_0\sqrt{1-\beta^2}}$; **..0,50 p** $$\frac{\cos\left(2\theta_0 - i'_0\right)+\beta}{1+\beta\cos\left(2\theta_0-i'_0\right)} = -\sin(\theta - r) = \sin(r-\theta);$$ $$\sin\left(2\theta_0-i'_0\right)\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\left(2\theta_0-i'_0\right)} = \cos(\theta - r) = \cos(r-\theta);$$ $\tan(r-\theta) = \frac{\cos\left(2\theta_0-i'_0\right)+\beta}{\sin\left(2\theta_0-i'_0\right)\sqrt{1-\beta^2}}$ **..0,50 p**		
B. Oscilațiile Sistemului Solar în Galaxia Noastră		**2,00 p**
c) Metoda 1 Fie pătura cu extindere infinită din figură. Considerăm Sistemul Solar la distanţa x de planul de simetrie. Datorită simetriei cele două pături haşurate îşi anulează efectul, deci acţiunea rezultantă asupra Sistemului Solar este dată doar de acţiunea păturii de grosime $2x$ **………………0,50 p** 		

Deplasarea faţă de planul de simetrie al Galaxiei este mică în raport cu grosimea acesteia.
Pentru a calcula această acţiune împărţim pătura în cilidri cu grosimea $\mathrm{d}r$, respectiv sumăm forţele exercitate de fiecare cilindru.

2,00 p



Pentru fiecare element de masă există un altul simetric faţă de normala dusă din Sistemul Solar pe pătura de grosime $2x$, deci componentele paralele cu pătura infinită se anulează. Singura acţiune este dată de componentele normale pe pătură.
Notaţii: R - distanţa de la Sistemul Solar la elementul de masă $\mathrm{d}m$;
D - distanţa de la Sistemul Solar la pătura infinită de grosime $2x$;
$\mathrm{d}\varphi$ - unghiul sub care se vede elementul de masă din centrul cilindrului, în planul suprafeţei păturii;
M - masa Sistemului Solar
Acţiunea elementelor de masă din cilindrul cu raza interioară r şi raza exterioară $r+\mathrm{d}r$ este dată de relaţia:

$$\mathrm{d}F_c=\int_0^{2\pi}K\frac{M\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{d}m}{R^2},$$

unde:

$$\mathrm{d}m=\rho\cdot 2x\cdot\mathrm{d}r\cdot r\mathrm{d}\phi$$

În aceste condiţii:

$$\mathrm{d}F_c=\int_0^{2\pi}K\cdot\frac{M}{(D^2+r^2)}\cdot\frac{D}{\sqrt{(D^2+r^2)}}\cdot 2\rho x r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,$$

deci

$$\mathrm{d}F_c=4\pi KMD\rho x\frac{r\mathrm{d}r}{(D^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$ **....................................0,50 p**

Acţiunea întregii păturii se găseşte însumând toate acţiunile elementare:

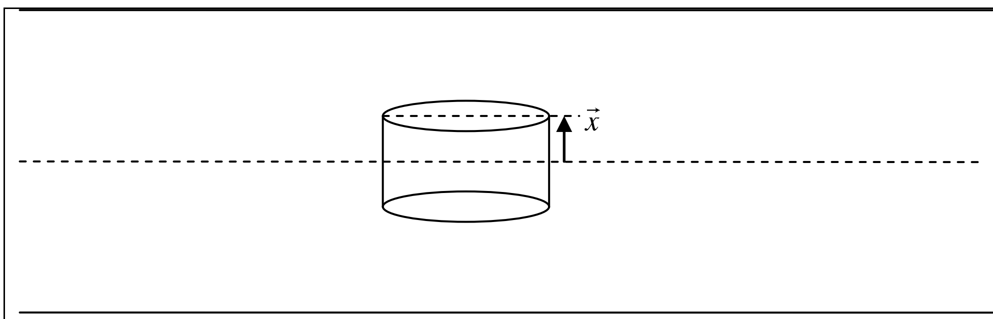
$$F=\int_0^{\infty}4\pi KMD\rho x\frac{r\cdot\mathrm{d}r}{(D^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi KMD\rho x\int_0^{\infty}\frac{r\cdot\mathrm{d}r}{(D^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi KM\rho x$$

...0,50 p

sau, ţinând cont de orientarea vectorilor:

$\vec{F}=-k_{\text{elastic}}\cdot\vec{x}$, unde

$k_{\text{elastic}} = 4\pi K\rho M$. Constatăm că deplasarea Sistemului Solar se efectuează sub acţiunea unei forţe de tip elastic, deci mişcarea acestuia este oscilatorie armonică. Perioada mişcării este dată de relaţia: $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_{\text{elastic}}}} = \sqrt{\frac{\pi}{K\rho}}$ ………………………………………**0,50 p** Înlocuind valorile numerice date în enunţ se obţine: $T \cong 2{,}17\cdot 10^{15}$ s $\cong$ 69 milioane de ani Este normal ca regiunea cea mai densă să fie în planul de simetrie al Galaxiei, deci traversarea acesteia se face o dată la circa 35 milioane de ani.		
Metoda 2 Teorema lui Gauss pentru câmpul electric are forma: $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ (Fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă închisă este egal cu raportul dintre sarcina electrică din interiorul suprafeţei şi permitivitatea dielectrică a vidului.) Prin analogie, aceasta se poate scrie şi pentru câmpul gravitaţional: $\oint_S \vec{\Gamma}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi K m_{\text{int}}$, unde: - $\vec{\Gamma}$ = intensitatea câmpului gravitaţional; - K = constanta atracţiei universale; - m_{int} = masa din interiorul suprafeţei. Alegem o suprafaţă cilindrică, cu bazele paralele cu planul de simetrie al păturii, la distanţe egale de acesta. Datorită simetriei, intensitatea câmpului gravitaţional este perpendiculară pe baze. Fluxul câmpului gravitaţional prin suprafaţa laterală este nul. Deci, fluxul câmpului gravitaţional prin suprafaţa închisă este: $\lvert\Phi\rvert = 2\pi R^2\Gamma = 4\pi K m_{\text{int}}$ **……………………………………..0,50 p** unde R este raza unei baze a suprafeţei cilindrice. Rezultă: $\Gamma = \frac{2Km_{\text{int}}}{R^2} = \frac{2K\rho\pi R^2 2x}{R^2} = 4\pi K\rho x$ **…………………………..0,50 p** iar forţa care acţionează asupra Sistemului Solar: $F = \Gamma M = 4\pi K\rho M x$. Evident $\vec{F}$ şi $\vec{x}$ au aceeaşi direcţie şi sens opus deci, putem scrie: $\vec{F} = -k_{\text{elastic}}\cdot\vec{x}$, adică o forţă de tip elastic**……………………...0,50 p** Constanta elastică are expresia: $k_{\text{elastic}} = 4\pi K\rho M$.	**2,00 p**	

 Perioada de oscilaţie este $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k_{\text{elastic}}}} = 2\pi\dfrac{1}{\sqrt{4\pi K\rho}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{K\rho}} \cong 2{,}17\cdot 10^{15}$ s $\cong$ 69 milioane ani ..**0,50 p**		
Oficiu		**1,00**